数理解析研究所講究録
第 1585 巻 2008 年 106-114

準非拡大写像に関する弱収束定理と制約可能性問題
(Weak convergence theorem for generalized nonexpansive mappings and feasibility problems)

茨木貴徳 (Takanori Ibaraki)
名古屋大学情報連携統括本部
(Information and Communications Headquarters, Nagoya University)
高橋渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院情報理工学研究科
(Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology)

1 はじめに

H をヒルベルト空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^r$ を H の空でないの閉凸集合の族で $C_0=\cap_{i=1}^r C_i$ が空集合でないとする. このとき, 画像復元問題 (problem of image recovery) とは H から C_i の上への距離射影 (metric projection) P_i $(i=1,2,\ldots,r)$ のみを用いた, 点列近似法で C_0 の元 z を求める問題である. ここで, H から C_i の上への距離射影 P_i とは, 任意の $x\in H$ に 対して次で定義される.

$$P_i(x)=\operatorname*{argmin}_{y\in C_i}\|x-y\|.$$

この画像復元問題は制約可能性問題 (feasibility problem) と関係がある. 制約可能性問題とは, H 上の実数値連続凸関数の r 個の族 $\{g_1,g_2,\ldots,g_r\}$ に対して, 次の制約可能性集合 (feasibility set) の元を求める問題である.

$$\bigcap_{i=1}^r\{x\in H: g_i(x)\leq 0\}.$$

ここで距離射影は次の重要な性質を持っている. すなわち $x\in H$ と $z\in C_i$ に対して, $z=P_ix$ であることの必要十分条件は, 任意の C_i の元 y に対して

$$\langle x-z,z-y\rangle\geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると P_i は非拡大射影 (nonexpansive retraction), すなわち任意の $x,y\in H$ に対して

$$\|P_ix-P_iy\|\leq\|x-y\|$$

かつ, 任意の C_i の元 z に対して $P_iz=z$ であることがわかる. 距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の 2 つ射影は古くから知られていた. 1996 年に Alber [1] は第 3 の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した. さらに近年, 茨木-高橋 [7, 8] は第 4 の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらの射影はヒルベルト空間上の距離射影の自然な拡張になっている. それはこれらの射影の性質を比較してみるとよくわかる. 比較し

やすいよう E を滑らか, 狭義凸, 回帰的なバナッハ空間とする. C を E の閉凸集合とし, P_C, Π_C, Q_C, R_C を E から C の上への 距離射影, 準距離射影, サニー非拡大射影, サニー準非拡大射影とする. このとき, $x \in E$, $x_0 \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} x_0 = P_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle J(x - x_0), x_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = \Pi_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle Jx - Jx_0, x_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = Q_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_0, J(x_0 - y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ x_0 = R_C x \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_0, Jx_0 - Jy\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \end{aligned}$$

である. ヒルベルト空間上での距離射影の重要な性質 (1.1) を考慮すると, これら 4 つの非線形射影はバナッハ空間への拡張と考えたとき自然な拡張であると言えよう. 実際, この 4 つの射影をヒルベルト空間で考えると全て同じ射影となることは容易にわかる. なぜなら, ヒルベルト空間では双対写像 J は恒等写像 I となり, この 4 つの性質は (1.1) と一致するからである ([7, 8] を参照).

一方, この議論とは別に, 1953 年に Mann [17] は非拡大写像 (nonexpansive mapping) T の不動点 (fixed point) を求めるために次の点列近似法を導入した.

$$x_1 \in C, \ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.2}$$

ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である. 1979 年に Reich [20] は Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸バナッハ空間上でこの不動点近似法を議論し, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1)$ に $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ の条件を加え, 点列 $\{x_n\}$ が T の不動点へ弱収束することを証明した. また, 2004 年に松下- 高橋 [18] はヒルベルト空間の非拡大写像のバナッハ空間への拡張である擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) を研究した. その研究で彼らは擬非拡大写像に関しての Mann 型の不動点近似法を議論し, その不動点への弱収束定理を証明した. 茨木-高橋 [7, 8] はヒルベルト空間の非拡大写像のバナッハ空間への拡張である準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) の概念を導入した.

本論文では, 準非拡大写像の不動点近似法とサニー準非拡大射影を用いた制約可能性問題をバナッハ空間上で議論する. 第 3 節では, 準非拡大写像を定義し, その射影での Mann 型の不動点近似法を議論する. また, サニー準非拡大射影の定義とその性質も研究する. 第 4 節では, 準非拡大写像の Mann 型の不動点近似法を利用した制約可能性問題を議論する. 第 5 節では, 1991 年に Crombez [5] が論じたヒルベルト空間上での制約可能性問題の解への点列近似法をバナッハ空間上で議論する. Crombez の手法は有限個の距離射影の凸結合で写像を作成し, その写像を用いて点列を構成する方法であった. 本論文では, この手法をバナッハ空間上のサニー準非拡大射影を用いて議論し, 制約可能性問題の解への点列近似法を論ずる.

2 準備

E をバナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x,y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $y \in S(E)$ に対して, (2.1) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $x \in S(E)$ に対して, (2.1) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x,y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([4, 24, 25] を参照).

1. $x \in E$ に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
2. $x, y \in E$ と $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$ に対して, $\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0$ である;
3. E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
   すなわち, $x \neq y \Rightarrow Jx \cap Jy = \emptyset$;
4. E が狭義凸であるための必要十分条件は,
   $x^* \in Jx,\ y^* \in Jy,\ x \neq y \Rightarrow \langle x-y, x^*-y^*\rangle > 0$ である;
5. E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
6. E が滑らかにであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3 準非拡大写像の弱収束定理とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1, 14, 19] を参照).

1. $x, y \in E$ に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x,y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
2. $x, y, z \in E$ に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x-z, Jz - Jy\rangle$ である;
3. E が狭義凸ならば, $x, y \in E$ に対して $V(x,y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, 写像 $T : C \to C$ が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空でなく, かつ任意の $x \in C$ と $y \in F(T)$ に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x,y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([7, 8] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合である. また, 写像 $T : C \to C$ が堅準非拡大写像 (firmly generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空でなく, かつ任意の $x \in C$ と $y \in F(T)$ に対して,

$$V(x, Tx) + V(Tx, y) \leq V(x,y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([12] を参照). ここで, 堅準非拡大写像ならば準非拡大写像になることは定義より明らかである. C の元 p が T の 漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, p に弱収束し, $\lim_{n\to\infty}(x_n - Tx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の漸近的不動点 の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 準非拡大写像と漸近的不動点に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.1 ([11, 18]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T) \neq \emptyset$ をみたすものとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \hat{F}(T)$ となる.

茨木-高橋 [9] は準非拡大写像に関して次の Mann 型の不動点近似法を用いた弱収束定理を得た.

定理 3.2 ([9]). E を滑らかで一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. T を C から C への準非拡大写像とし, $F(T) = \hat{F}(T)$ とする. $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の元 z に弱収束する.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.3 ([7, 8]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の $x \in E$ と $y \in D$ に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E から E^* への双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. 実際, R, S を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, 補助定理 3.3 より, 任意の $x \in E$ と $y \in D$ に対して,

$$\langle x - Rx, JRx - Jy \rangle \geq 0, \ \langle x - Sx, JSx - Jy \rangle \geq 0$$

が成り立つ. $Rx, Sx \in D$ であることから,

$$\langle x - Rx, JRx - JSx \rangle \geq 0, \ \langle x - Sx, JSx - JRx \rangle \geq 0$$

が成り立つ. この 2 つの不等式から

$$\langle Sx - Rx, JRx - JSx \rangle \geq 0$$

が得られ, E が狭義凸であることから $Sx = Rx$ である. また, この計算から分かるように, 次の不等式を満たす $z \in E$ は一意である.

$$\langle x - z, Jz - Jy \rangle \geq 0, \quad \forall y \in D.$$

そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([7, 8] を参照).

サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の性質が知られている.

補助定理 3.4 ([8, 9]). E を滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, R_D は堅準非拡大写像になる.

補助定理 3.5 ([9]). E を滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $F(R) = \hat{F}(R)$ が成り立つ.

4 制約可能性問題とMann型の点列近似法

本節では, Mann 型の点列近似法を用いて, 制約可能性問題の解への点列近似を 2 つの方法で議論する. 高橋 [23] は有限個の非拡大写像の共通不動点を求めるために有限個の写像の凸結合からなる W-写像 (W-mapping) という写像を導入した; C をバナッハ空間 E の空でない凸集合とし, $T_1, T_2, \dots, T_r$ を C から C への r 個の写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を r 個の実数で $0 \le \alpha_i \le 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ を満たすものとする. このとき, C から C への写像 W を

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 T_1 + (1 - \alpha_1) I, \\ U_2 &= \alpha_2 T_2 U_1 + (1 - \alpha_2) I, \\ &\vdots \\ U_{r-1} &= \alpha_{r-1} T_{r-1} U_{r-2} + (1 - \alpha_{r-1}) I, \\ W = U_r &= \alpha_r T_r U_{r-1} + (1 - \alpha_r) I \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する ([27] を参照). このような写像 W は, $T_1, T_2, \dots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ によって生成される W-写像といわれる. 準非拡大写像の W-写像に関しては次の補助定理が得られている.

補助定理 4.1 ([9]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \dots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でない C から C への r 個の準非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$, $0 < \alpha_r \le 1$ となる r 個の実数とする. また, W を $T_1, T_2, \dots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ によって生成される W-写像とする. このとき,

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$$

である.

補助定理 4.2 ([9]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \dots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ となる C から C への r 個の堅準非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$, $0 < \alpha_r \le 1$ となる r 個の実数とする. また, W を $T_1, T_2, \dots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ によって生成される W-写像とする. このとき, $F(W) = \hat{F}(W)$ である.

これらの補助定理と定理 3.2 を用いて次の定理が得られる.

定理 4.3 ([9]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \dots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ となる C から C への r 個の堅準非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$, $0 < \alpha_r \le 1$ となる r 個の実数とする. W を $T_1, T_2, \dots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ によって生成される W-写像とし, $\{\beta_n\}$ を $0 \le \beta_n \le 1$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\liminf_{n\to\infty} \beta_n (1 - \beta_n) > 0$ を満たす実数とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) W x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

この定理と補助定理 3.4 と 3.5 の直接的な結果として, 制約可能性問題に関係する次の定理を得ることができる.

定理 4.4 ([9]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \le 1$ となる r 個の実数とする. W を $R_1, R_2, \ldots, R_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W-写像とする. ただし, R_i は E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする. また, $\{\beta_n\}$ を $0 \le \beta_n \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\liminf_{n\to\infty} \beta_n(1-\beta_n) > 0$ を満たす実数とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) W x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r D_i$ の元 z に弱収束する.

次に, 準非拡大写像の有限個の積写像を利用した Mann 型の点列近似法を議論する. 準非拡大写像の有限個の積写像に関しては次の 2 つの性質が知られている.

補助定理 4.5 ([10]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる C から C への r 個の堅準非拡大写像とする. このとき,

$$\hat{F}(T_r T_{r-1} \cdots T_1) = F(T_r T_{r-1} \cdots T_1) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$$

である.

補助定理 4.6 ([10]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる C から C への r 個の堅準非拡大写像とする. このとき, $T_r T_{r-1} \cdots T_1$ は準非拡大写像となる.

これらの補助定理と定理 3.2 の直接的な結果として次の定理が得られる.

定理 4.7. E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ が空でなく, かつ $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる C から C への r 個の堅準非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 \le \alpha_n \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ となる実数とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T_r T_{r-1} \cdots T_1 x_n, \ . \ n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r F(T_i)$ の元 z に弱収束する.

最後に, 定理 4.7 と補助定理 3.4 と 3.5 の直接的な結果として, 制約可能性問題に関係する次の定理を得ることかできる.

定理 4.8. E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー準非拡大レトラクトとし, R_i を E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \ldots, r)$. $\{\alpha_n\}$ を $0 \le \alpha_n \le 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ となる実数とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) R_r R_{r-1} \cdots R_1 x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^r D_i$ の元 z に弱収束する.

5 制約可能性問題と Crombez 型の点列近似法

本節では, 1991 年に Crombez [5] が提案した距離射影により生成された凸結合写像の点列近似法を議論する. $C_1, C_2, \dots, C_r$ をヒルベルト空間 H の $C_0 := \cap_{i=1}^r C_i$ が空でない r 個の閉凸集合とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を $\alpha_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, \dots, r)$, $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$ となる r 個の実数とする. このとき E 上の写像 T を

$$T = \alpha_0 I + \sum_{i=1}^r \alpha_i T_i$$

で定義する. ただし, $T_i = I + \lambda_i (P_i - I)$, $0 < \lambda_i < 2$, $(i = 0, 1, 2, \dots, r)$, P_i は H から C_i の上への距離射影とする. このとき, Crombez [5] は初期点を H の任意の元 x としたとき, 点列 $\{T^n x\}$ は C_0 の元へ弱収束することを証明した. この点列近似法は, 後に北原-高橋 [15], 高橋-田村 [28] によって, 一様凸バナッハ空間上のサニー非拡大射影に拡張され研究された.

サニー準非拡大射影に関する Crombez 型の点列近似法を議論するために, まず写像に関する定義を与える. C をバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への写像とする. このとき, 写像 T が漸近的正則 (asymptotically regular) であるとは, 任意の C の 元 x に対して, 点列 $\{T^{n+1}x - T^n x\}$ が E の零元に強収束することと定義する. 準非拡大写像で生成された凸結合写像には次の性質が知られている.

補助定理 5.1 ([10]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $S_1, S_2, \dots, S_r$ を $\cap_{i=1}^r F(S_i)$ が空でない E から E への r 個の準非拡大写像とする. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ を $0 < \beta_i < 1$ $(i = 0, 1, \dots, r)$, $\sum_{i=0}^r \beta_i = 1$ となる r 個の実数とする. E 上の 写像 S を

$$S = \beta_0 I + \sum_{i=1}^r \beta_i S_i$$

と定義する. このとき, S は漸近的正則になる.

次に, サニー準非拡大射影で生成された凸結合写像には次の性質が知られている.

補助定理 5.2 ([10]). E を 滑らかで, 回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \dots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個のサニー準非拡大レトラクトとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ となる r 個の実数とする. E 上の写像 S を

$$S = \sum_{i=1}^r \alpha_i S_i$$

で定義する. ただし, $S_i = (1 - \lambda_i) I + \lambda_i R_i$, $0 < \lambda_i < 1$, R_i は E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \dots, r)$. このとき $F(S) = \cap_{i=1}^r D_i$ である.

補助定理 5.3 ([10]). E を滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \dots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー準非拡大レトラクトとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ となる r 個の実数とする. E 上の写像 S を

$$S = \sum_{i=1}^r \alpha_i S_i$$

で定義する. ただし, $S_i = (1 - \lambda_i) I + \lambda_i R_i$, $0 < \lambda_i < 1$, R_i は E から D_i の上へのサニー準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \dots, r)$. このとき, $\hat{F}(S) = F(S)$ である.

これらの補助定理を利用して, 制約可能性問題に関係する次の弱収束定理を得ることができる.

定理 5.4 ([10]). E を滑らかで一様凸バナッハ空間とし, $D_1, D_2, \dots, D_r$ を $\cap_{i=1}^r D_i$ が空でない E の r 個の弱閉なサニー一準非拡大レトラクトとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ となる r 個の実数とする. E 上の写像 S を

$$S = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i S_i$$

で定義する. ただし, $S_i = (1 - \lambda_i)I + \lambda_i R_i$, $0 < \lambda_i < 1$, R_i は E から D_i の上へのサニー一準非拡大射影とする $(i = 1, 2, \dots, r)$. このとき, 任意の $x \in E$ に対して, 点列 $\{S^n x\}$ は $F(S)$ の元 z に弱収束する.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] R. E. Bruck, *Nonexpansive retract of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 384–386.

[3] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mapping in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 251–262.

[4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[5] G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 413–419.

[6] G. Das and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. **17** (1986), 1263–1269.

[7] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), 929–944.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorems for finding common elements of finite sets in Banach spaces*, Sci. Math. Jpn. Online **e-2007** (2007), 433–442.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces*, to appear.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonlinear operators of firmly nonexpansive type in Banach spaces*, to appear.

[13] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[15] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **2** (1993), 333–342.

[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[17] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[19] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[20] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[21] S. Reich, *Constructive techniques for accretive and monotone operators*, Applied nonlinear analysis (Proc. Third Internat. Conf., Univ. Texas, Arlington, Tex., 1978), Academic Press, New York, 1979, 335–345,

[22] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[23] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A **51** (1997), 277–292.

[24] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[25] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[26] 高橋渉, 「バナッハ空間における近接点法と非線形射影」京都大学数理解析研究所講究録 **1520** (2006), 116–131.

[27] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modeling **32** (2000), 1463–1471.

[28] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approx. Theory **91** (1997), 386–397.

[29] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1981), 1127–1138.

[30] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.